ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.13 1982

Н.Н.Локотков

О СПЕЦИАЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ p-ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ n-ПРОСТРАНСТВЕ

1.Дана гладкая p-мерная поверхность V_p в евклидовом n-пространстве E_n. Пусть на поверхности V_p задано нормальное векторное поле $\vec{e}$. В работах [1],[3]-[5] изучается параллельный перенос нормального векторного поля $\vec{e}$ в нормальной связности вдоль всей поверхности. В частности, в [4],[5] изучается этот вопрос, когда $\vec{e}$ -поле вектора средней нормали. Мы будем исследовать случай, когда векторное поле $\vec{e}$ -единичное и переносится параллельно вдоль некоторого q-мерного $(q \leq p)$ распределения Δ_q. В общем случае распределение Δ_q не интегрируемо, однако любое одномерное подраспределение $\Delta_1 \subset \Delta_q$ интегрируемо. В работе рассматривается случай, когда существует интегрируемое подраспределение $\Delta_r \subset \Delta_q$ $(2 \leq r \leq q)$ и выясняется строение возникающей поверхности $V_r \subset V_p$.

2.Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $\mathcal{R}=\{x, \vec{e}_I, \vec{e}_\alpha\}$, где $x \in V_p$, векторы $\vec{e}_I$ $(I, J, \ldots = \overline{1,p})$ лежат в касательном пространстве T_x к поверхности V_p в точке x, векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta, \ldots = \overline{p+1, n})$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в пространстве E_n. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^I \vec{e}_I, \quad d\vec{e}_I = \omega_I^J \vec{e}_J + \omega_I^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^I \vec{e}_I + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \quad (1)$$

Дифференциальные формы ω удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства.

Поверхность V_p в репере R определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$. Продолжая эту систему, получим:

$$\omega_I^\alpha = b_{IJ}^\alpha \omega^J, \quad b_{IJ}^\alpha = b_{JI}^\alpha. \quad (2)$$

Величины b_{IJ}^α образуют второй фундаментальный тензор поверхности V_p. Легко проверить, что

$$db_{IJ}^\alpha = b_{IK}^\alpha \omega_J^K + b_{JK}^\alpha \omega_I^K - b_{IJ}^\beta \omega_\beta^\alpha + b_{IJK}^\alpha \omega^K, \quad (3)$$

b_{IJK}^α -симметричны по всем нижним индексам.

Мы можем взять $\vec{e}_n = \vec{e}$, тогда формы ω_n^α главные, то есть $\omega_n^\alpha = \lambda_I^\alpha \omega^I$ коэффициенты λ_I^α образуют тензор. Можно найти, что

$$d\lambda_I^\alpha = \lambda_J^\alpha \omega_I^J + b_{IJ}^\alpha \omega_n^J - \lambda_I^\beta \omega_\beta^\alpha + \lambda_{IK}^\alpha \omega^K. \quad (4)$$

Векторное поле $\vec{e}_n$ называется параллельным в нормальной связности вдоль распределения Δ_q, если $d\vec{e}_n \in T_x$ при смещении точки x вдоль распределения Δ_q, то есть,

$$\omega_n^\alpha = \lambda_I^\alpha \omega^I \quad \text{при} \quad d\vec{x} \in \Delta_q. \quad (*)$$

3.Предположим, что на поверхности V_p существует сеть Σ_p линий кривизны относительно векторного поля $\vec{e}_n$ [2] такая, что первые r линий лежат в распределении Δ_r, следующие $q-r$ линий лежат в распределении Δ_q, остальные $p-q$ линий лежат в ортогонально-дополнительном к Δ_q распределении Δ_{p-q} в касательном расслоении. В дальнейшем индексы пробегают значения:

$$\varepsilon, \delta, \ldots = \overline{1, r}; \quad i_1, j_1, \ldots = \overline{r+1, q}; \quad i_2, j_2, \ldots = \overline{q+1, p}.$$

Векторы $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_p$ будем брать единичными и касательными к линиям сети Σ_p. Тогда в выбранном репере $\omega_n^\alpha = \lambda_{i_2}^\alpha \omega^{i_2}$. Так как распределение Δ_r интегрируемо, то из тождеств $\lambda_\varepsilon^\alpha = 0$ с учетом равенств (4) получаем:

$$b_{\varepsilon\delta}^\alpha (b_{\varepsilon\varepsilon}^n - b_{\delta\delta}^n) = 0, \text{ суммирования нет }. \quad (5)$$

При необходимости мы можем линии сети Σ_p перенумеровать так, что система уравнений (5) выполняется, если на распределении Δ_r существуют s l_i-мерных распределений

$\Delta^i_{\ell_i}$ $(i,j,\ldots=\overline{1,s};\ell_i\geqslant 2)$ и $\kappa(\ell_1+\ldots+\ell_s+\kappa=r)$ одномерных распределений Δ^a_1 $(a=\overline{\ell_1+\ldots+\ell_s+1,r})$ таких, что

$$b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}=b^n_{\delta_i\delta_i};\ b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}\neq b^n_{\varepsilon_j\varepsilon_j}\ (i\neq j);\ b^\alpha_{\varepsilon_i\varepsilon_j}=0\ (i\neq j);$$
$$b^\alpha_{\varepsilon_i\delta_a}=0;\ b^\alpha_{\delta_a\delta_b}=0;\ b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}\neq b^n_{\varepsilon_a\varepsilon_a},\tag{6}$$

где $\varepsilon_i,\delta_i,\ldots=\overline{\ell_1+\ldots+\ell_{i-1}+1,\ell_1+\ldots+\ell_i}$.
При $i=1$ полагаем $\ell_{i-1}=0$. Следовательно, все распределения $\Delta^i_{\ell_i}$ и Δ^a_1 попарно ортогональны и сопряжены на поверхности V_p. Так как Σ_p сеть линий кривизны относительно нормали $\vec{e}_n$, то

$$b^n_{\varepsilon_i\delta_i}=0,\quad \varepsilon_i\neq\delta_i.\tag{7}$$

Продифференцировав тождества (7), с учетом тождеств (3), (6), получим

$$-b^\alpha_{\varepsilon_i\delta_i}\omega^n_\alpha+b_{\varepsilon_i\delta_i\varkappa}\omega^\varkappa=0$$

Так как ω^n_α выражаются только через ω^{i_2}, то

$$b^n_{\varepsilon_i\delta_i i_1}=0,\quad b^n_{\varepsilon_i\delta_i\varepsilon}=0\quad(\varepsilon_i\neq\delta_i),\tag{8}$$

отсюда, в частности, следует

$$b^n_{\varepsilon_i\delta_i\varepsilon_\alpha}=b^n_{\varepsilon_i\delta_i\varepsilon_j}=b^n_{\varepsilon_i\delta_i\varepsilon_i}=0\quad(\varepsilon_i\neq\delta_i).\tag{9}$$

Из тождеств $b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_\alpha}=0$, учитывая тождества (3), (6), находим

$$\omega^{\varepsilon_\alpha}_{\varepsilon_i}=\frac{b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_\alpha\varkappa}\omega^\varkappa}{b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}-b^n_{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\alpha}}.$$

Учитывая (9), получим

$$\omega^{\varepsilon_\alpha}_{\varepsilon_i}=\frac{1}{b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}-b^n_{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\alpha}}\cdot\Big(b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_\alpha i_1}\omega^{i_1}+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_\alpha i_2}\omega^{i_2}+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_\alpha\varepsilon_\ell}\omega^{\varepsilon_\ell}+$$
$$+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_\alpha\delta_j}\omega^{\delta_j}+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i\varepsilon_\alpha}\omega^{\varepsilon_i}\Big),\tag{10}$$

по ε_i нет суммирования и $\delta_j\neq\varepsilon_i$.
Аналогично можно найти

$$\omega^{\varepsilon_j}_{\varepsilon_i}=\frac{1}{b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}-b^n_{\varepsilon_j\varepsilon_j}}\Big(b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_j i_1}\omega^{i_1}+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_j i_2}\omega^{i_2}+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_a}\omega^{\varepsilon_a}+$$
$$+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_j\delta_m}\omega^{\delta_m}+b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_i}\omega^{\varepsilon_i}\Big),\ (\delta_m\neq\varepsilon_i).\tag{11}$$

Возьмем распределение $\Delta^i_{\ell_i}$. Оно интегрируемо тогда и только тогда, когда интегрируема система уравнений

$$\begin{cases}\omega^\alpha=0, & \mathrm{I}\\ \omega^{i_1}=0, & \mathrm{II}\\ \omega^{i_2}=0, & \mathrm{III}\\ \omega^{\varepsilon_a}=0, & \mathrm{IV}\\ \omega^{\varepsilon_j}=0,\ j\neq i & \mathrm{V}\end{cases}\tag{12}$$

Подсистема системы (12), состоящая из уравнений I, II, III, интегрируема, так как распределение Δ_r интегрируемо. Проверим интегрируемость подсистемы IV, V. Имеем

$$\mathcal{D}\omega^{\varepsilon_a}=\omega^{\varepsilon_i}\wedge\omega^{\varepsilon_a}_{\varepsilon_i}.$$

С учетом (10) получим

$$\mathcal{D}\omega^{\varepsilon_a}=\omega^{\varepsilon_i}\wedge\frac{b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i\varepsilon_a}\omega^{\varepsilon_i}}{b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}-b^n_{\varepsilon_a\varepsilon_a}}=0.$$

Таким образом, система IV вполне интегрируема. Аналогично, с учетом равенства (11), можно показать, что система V вполне интегрируема. Тогда распределение $\Delta^i_{\ell_i}$ интегрируемо. Поэтому справедлива

Т е о р е м а. Пусть на поверхности V_p в E_n существует распределение $\Delta_q\supset\Delta_r$, вдоль которого переносится параллельно в нормальной связности нормаль $\vec{e}_n$, причем распределение Δ_q содержит q линий кривизны относительно $\vec{e}_n$ и r из этих линий лежат в распределении Δ_r. Если распределение Δ_r интегрируемо, то поверхность V_r расслаивается на ортогонально-сопряженную на поверхности V_p систему s поверхностей $V^i_{\ell_i}$ и κ семейств линий.

4. Т е о р е м а. Каждая поверхность $V^i_{\ell_i}$ лежит на гиперсфере с радиусом $\dfrac{1}{|b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}|}$ и центром C_i, где $\vec{C}_i=\vec{x}+(1/b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i})\vec{e}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Было показано, что $b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i\delta_i}=0$ $(\varepsilon_i\neq\delta_i)$. Используя равенство $b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}=b^n_{\delta_i\delta_i}$ $(\varepsilon_i\neq\delta_i)$ и равенства (8), можно показать, что $b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i\varepsilon_i}=0$. Тогда $b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i\delta_i}=0$ для любого δ_i. Поэтому $db^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}=0$ на поверхности $V^i_{\ell_i}$, т.е. $b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}=const$ и $1/|b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}|=const$ вдоль поверхности $V^i_{\ell_i}$. Рассмотрим точку C_i, определяемую вектором $\vec{c_i} = \vec{x} + (1/b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i})\vec{e}_n$. Находим

$$d\vec{c_i} = \omega^\gamma \vec{e}_\gamma + d(1/b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i})\vec{e}_n + (1/b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i})(\omega^\gamma_n \vec{e}_\gamma + \omega^\alpha_n \vec{e}_\alpha). \quad (13)$$

Вдоль поверхности $V^i_{\ell_i}$ имеем

$$d\vec{c_i} = \omega^{\delta_i}\vec{e}_{\delta_i} - (1/b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i})\sum_{\varepsilon_i} b^n_{\delta_i\delta_i}\,\omega^{\delta_i}\vec{e}_{\delta_i} = 0 .$$

Поэтому точка C_i неподвижна при смещении точки по поверхности $V^i_{\ell_i}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I. Все центры C_i лежат на одной нормали $[x, \vec{e}_n]$.

Когда точка x описывает поверхность V_p, точка C_i описывает некоторую поверхность $\widetilde{V}^i$. Если $d\vec{x} \in \Delta_q$, то в касательном пространстве к поверхности $\widetilde{V}^i$ в точке C_i выделяется подпространство T^i. Так как выполняется (*), то из равенства (13) следует, что выполняется

Т е о р е м а. Подпространство T_i касательного пространства к поверхности $\widetilde{V}^i$ в точке C_i ортогонально $(n-p-1)$-мерному подпространству, ортогонально-дополнительному к $\vec{e}_n$ в N_x.

5. Допустим, что на поверхности V_p существуют распределения $\Delta_r \subset \Delta_q$, такие, что выполняются условия:

а/ распределение Δ_r расслаивается на ортогонально-сопряженную систему S поверхностей $V^i_{\ell_i}$ и K семейств линий сети Σ_p,

б/ каждая поверхность $V^i_{\ell_i}$ лежит на гиперсфере с радиусом $1/|b^n_{\varepsilon_i\varepsilon_i}|$ и центром C_i,

в/ все центры C_i лежат на нормали $[x, \vec{e}_n]$,

г/ подпространство T^i ортогонально $(n-p-1)$-мерному векторному пространству, ортогонально-дополнительному к $\vec{e}_n$ в N_x.

Тогда из условия г/ следует $\omega^\alpha_n = 0$ вдоль распределения Δ_q. Из условий а/-в/ следует, что выполняются равенства (10), следовательно, распределение Δ_r интегрируемо. Поэтому верна

Т е о р е м а. Если на поверхности V_p в E_n существуют распределения $\Delta_r \subset \Delta_q$, такие, что выполняются условия а/-г/, то вдоль распределения Δ_q нормальное векторное поле $\vec{e}_n$ переносится параллельно, и распределение Δ_r интегрируемо.

З а м е ч а н и е 2. В работе [3] рассмотрен случай $r=q=p$ для риманова пространства постоянной кривизны.

Список литературы

I. А к и в и с М.А., Чакмазян А.В. Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле. -ДАН АССР, 1975, 60, № 3, с. 137-143.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. -Лит. матем. сб., 1966, №4, 6, с. 475-490.

3. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем. -Известия вузов. Математика, 1974, №5, с. 148-157.

4. Kentaro Y. Submanifolds with parallel mean curvature vector of a eucliden spase or a sphere. Koday math. sem. rep., 1971, V.23, N1.

5. Chen Bang-Yen. On the surface with parallel mean curvature vector. Indiana University mathematics journal. 1973, V.22, N7.

